Lebesgue 定理

零测集

定义 1 设 A 是一个实数集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或一列开区间 $\{I_n,\ n \in \mathbb{N}_+\}$, 使得

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant \varepsilon$$

(这里 $|I_n|$ 表示 I_n 的长度), 那么称 A 为零测度集, 简称零测集.

显然, 有

1° 空集是零测集.

2° 零测集的子集还是零测集.

例 1 任何长度不为 0 的区间都不是零测集.

证明 不妨设该区间是 (a,b), $a < b$. 对于任何开区间列 $\{I_n\}$, 若

$$(a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geqslant b - a > 0.$$

因此, (a,b) 不可能是零测集.

例 2 可数个零测集的并仍是零测集.

证明 设有可数个零测集

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots.$$

因为 A_k 是零测集, 所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在开区间列

$$I_{k_1}, I_{k_2}, \cdots, I_{k_j}, \cdots,$$

使得

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k_j}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_{k_j}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

于是, 有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k_j}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_{k_j}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

这就说明 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 是零测集.

例 3 如果 A 是至多可数集, 那么 A 是零测集.

证明 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 令

$$I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right), \ n = 1, 2, \cdots,$$

则显然有 $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_+} I_n$, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

由此可知, 有理数全体是零测集.

例 4 非空开区间 (a, b) 上的无理数全体不是零测集.

证明 由于有理数全体是零测集, 因此若 (a, b) 上的无理数全体是零测集, 则 (a, b) 也是零测集. 这是不可能的.

振幅

定义 2 设 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 称

$$\omega_f(I) = \sup_{x,y\in I} |f(y) - f(x)| = \sup_{y\in I} f(y) - \inf_{x\in I} f(x)$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的振幅.

定义 3 设 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 对于 $x \in I$, $\delta > 0$, 记 $I_x(\delta) = (x-\delta, x+\delta) \cap I$. 称

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(I_x(\delta))$$

为 $f(x)$ 在点 $x \in I$ 的振幅.

显然, 当 $x \in I \subset J$ 时, 有

$$\omega_f(x) \leqslant \omega_f(I) \leqslant \omega_f(J).$$

引理 1 设 f 是区间 I 上的有界函数, 则 f 在点 $x_0 \in I$ 连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0)=0$.

证明 必要性. 设 f 在 x_0 连续, 则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x \in I_{x_0}(\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $x, y \in I_{x_0}(\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(x_0)|+|f(y)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由此可得

$$\omega_f(I_{x_0}(\delta)) \leqslant \varepsilon.$$

此式蕴含

$$\omega_f(x_0) \leqslant \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 就得到 $\omega_f(x_0)=0$.

充分性. 设 $x_0 \in I$ 且 $\omega_f(x_0)=0$.

注意到

$$\omega_f(x_0)=\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(I_{x_0}(\delta)),$$

可知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\omega_f(I_{x_0}(\delta))<\varepsilon$. 因此, 当 $x \in I_{x_0}(\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这说明 f 在 x_0 连续. □

Lebesgue 定理

设 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界函数, $\delta>0$. 记

$$D_\delta(f)=\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geqslant \delta\},$$

即, 区间 $[a, b]$ 中 f 的振幅不小于 δ 的那些点的全体.

显然, 当 $0<\delta_1<\delta_2$ 时, 有

$$D_{\delta_2}(f) \subset D_{\delta_1}(f).$$

再记 $D(f)$ 为区间 $[a, b]$ 中 f 的不连续点全体, 即

$$D(f)=\{x \in [a, b] \mid f \text{ 在 } x \text{ 处不连续}\}.$$

我们有下面的引理.

引理 2 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 我们有

$$D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(f).$$

证明 因为 f 的振幅大于零的点都是 f 的不连续点, 所以对任意正整数 n, 有 $D_{1/n}(f)\subset D(f)$. 因而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(f)\subset D(f)$.

设 $x\in D(f)$, 即 f 在 x 不连续. 根据引理 1, 有 $\omega_f(x)>0$. 因此存在正整数 n, 使得 $\omega_f(x)>\dfrac{1}{n}$. 这就是说 $x\in D_{1/n}(f)$. 因而

$$D(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(f).$$

□

引理 3 设 f 是区间 $I=[a,b]$ 上的有界函数. 设 $I_j=(\alpha_j,\beta_j)$, $j=1,2,\cdots$ 是一列开区间. 记

$$K=[a,b]\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

如果 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, 那么对任意给定的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall\ x\in K,\ y\in I_x(\delta).$$

证明 (反证) 若结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $x_n\in K$, 及 $y_n\in I_{x_n}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 满足

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

根据 Bolzano-Weierstrass 定理, $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 $x_0\in[a,b]$. 因为 y_{n_i} 到 x_{n_i} 的距离小于 $\dfrac{1}{n_i}$, 所以 $\{y_{n_i}\}$ 也收敛于 x_0.

由于 x_{n_i} 不在任何开区间 I_n 中, 因此 x_0 也不在任何 I_n 中, 于是 $x_0\in K$.

因为 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, 所以 x_0 是 f 的连续点.

由

$$|f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|\geqslant\varepsilon_0,$$

并令 $i\to\infty$, 得到

$$0=|f(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

这是矛盾! 于是结论成立. $\square$

注意, K 是一个紧集 (有界闭集), f 在 K 上连续. 因此, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\ \forall\ x,y\in K, |x-y|<\delta.$$

但本引理的结论中只要求 $x\in K$, 而不必 $y\in K$.

定理 1 (Lebesgue 定理) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是: $f(x)$ 的间断点全体 $D(f)$ 是一个零测集.

证明 必要性. 根据引理 2, 只需证明 $D_{1/n}$ 是零测集. 也就是要找长度之和充分小的开区间列覆盖 $D_{1/n}$.

因为 f 在 $[a,b]$ 可积, 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和正整数 n, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{n}. \tag{1}$$

记

$$E_n=D_{1/n}\setminus\{x_0,x_1,\cdots,x_m\},$$

只需证明 E_n 是零测集. 由于

$$[a,b]\setminus\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}=\bigcup_{i=1}^{m}(x_{i-1},x_i),$$

所以

$$\begin{aligned}E_n&=D_{1/n}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}(x_{i-1},x_i)\right)\\&\subset\bigcup_{i=1}^{m}\big\{(x_{i-1},x_i)\big|\ D_{1/n}\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing\big\},\end{aligned}$$

这说明 E_n 被一列开区间覆盖, 每个开区间中都含有 $D_{1/n}$ 的点. 任取 $t\in D_{1/n}\cap$

(x_{i-1}, x_i), 则有 $\omega_f(t) \geqslant \dfrac{1}{n}$. 因为 $t \in (x_{i-1}, x_i)$, 可取 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$I_t(\delta) = (t-\delta, t+\delta) \subset (x_{i-1}, x_i).$$

于是

$$\omega_i = M_i - m_i \geqslant \omega_f(I_t(\delta)) \geqslant \omega_f(t) \geqslant \frac{1}{n}. \tag{2}$$

用 $\sum'$ 表示对那些使得 $D_{1/n} \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \varnothing$ 的 i 求和, 则从 (1) 和 (2) 可得

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum{}' \omega_i \Delta x_i \geqslant \frac{1}{n} \sum{}' \Delta x_i,$$

因此, 有

$$\sum{}' \Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明覆盖 E_n 的那些开区间的长度之和小于 ε. 于是 E_n 是零测集.

充分性. 设 $D(f)$ 是零测集, 则存在一列开区间 (α_i, β_i), $i = 1, 2, \cdots$, 使得

$$D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i), \quad \text{且} \ \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

其中 ω 是 f 在 $[a, b]$ 上的振幅. 记

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i).$$

根据引理 3, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \ \forall\, x \in K, y \in I_x(\delta).$$

取分割

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $\|T\| < \delta$. 将 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ 分成两部分:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum{}_1 \omega_i \Delta x_i + \sum{}_2 \omega_i \Delta x_i,$$

这里 $\sum_1 \omega_i \Delta_i$ 表示对 K 和 (x_{i-1}, x_i) 相交非空的那些 i 求和, 而 $\sum_2 \omega_i \Delta x_i$ 表示对 K 和 (x_{i-1}, x_i) 相交为空集的那些 i 求和.

对于 $\sum_1 \omega_i \Delta x$ 中的项, 因为 $K \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \varnothing$, 任取 $y_i \in K \cap (x_{i-1}, x_i)$, 由

引理 3, 得

$$\begin{aligned}\omega_i &= \sup\left\{|f(z_1)-f(z_2)| \,\middle|\, z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{|f(z_1)-f(y_i)| + |f(z_2)-f(y_i)| \,\middle|\, z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]\right\} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

所以

$$\textstyle\sum_1 \omega_i \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \dfrac{\varepsilon}{2}.$$

再看 $\sum_2 \omega_i \Delta x_i$ 中的项. 因为 $\omega_i \leqslant \omega$, 所以

$$\textstyle\sum_2 \omega_i \Delta x_i \leqslant \omega \sum_2 \Delta x_i.$$

对于 $\sum_2 \omega_i \Delta x_i$ 中的项, 因为 $K \cap (x_{i-1}, x_i) = \varnothing$, 故当 $x \in (x_{i-1}, x_i)$ 时, $x \notin K$, 因而 $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$, 即

$$(x_{i-1}, x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i).$$

所以

$$\textstyle\sum_2 \Delta x_i \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

代入 (5), 即得

$$\textstyle\sum_2 \omega_i \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2}.$$

把 (4), (6) 代入 (3), 即得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

根据可积的充分必要条件, 可知 f 在 $[a, b]$ 上可积. □

推论 1 设 f 是 $[a, b]$ 上的有界函数. 若 f 至多有可数个间断点, 则 f 在 $[a, b]$ 可积.

推论 2 设 f 是 $[a, b]$ 上的可积函数. 若 $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 上有定义且有界, 则 $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 可积.

推论 3 若 f 是 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 f 在任意子区间 $[c, d] \subset [a, b]$ 上也可积.

推论 4 设 $c \in (a,b)$. 若 f 在两个子区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上也可积.

定义 4 设 "结论 A" 与区间 I 中的点有关. 如果使 "结论 A" 不成立的点的全体是 I 中的零测集, 则称 "结论 A" 在 I 上几乎处处成立, 记为

$$\text{“结论 } A \text{ 成立” (a.e.).}$$

"a.e." 是 almost everywhere 的缩写.

定理 2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x) = 0$ (a.e.), 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为零.

定理 3 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为零, 则在 $[a,b]$ 上 $f(x) = 0$ (a.e.).